

1. ALKALMAZOTT LINEÁRIS ALGEBRA HÁZI FELADAT

A feladat sorszám: 141

Egy üzem négyféle erőforrás (E_1, \dots, E_4) segítségével négyféle terméket (T_1, \dots, T_4) állít elő. Az alábbi táblázat a termékegységre vonatkozó erőforrás-ráfordításokat vagy más néven technológiai együtthatókat, az egyes erőforrásokból felhasználható mennyiségeket ($Fh.ef.$), az egyes erőforrások egységárát ($Ef.e.ár$) és az egyes termékek szerelési költségét ($Sz.ktg.$) tartalmazza.

	T1	T2	T3	T4	Fh.ef.	Ef.e.ár
E1	5	1	3	2	214	93
E2	0	3	5	7	309	94
E3	3	1	1	3	152	71
E4	2	1	6	5	304	72
Sz.ktg.	73	59	71	72		

FELADAT:

- A) Meghatározandó az egyes termékekből előállítható mennyiség!
- Írja fel a feladat matematikai modelljét!
 - Határozza meg a termékmennyiségeket háromféle eljárással:
 - Gauss-módszerrel,
 - Gauss-Jordan módszerrel,
 - Pivotálással!
 - Számítsa ki a technológiai együtthatókat tartalmazó ún. technológiai mátrix inverzét három eljárással:
 - Pivotálással,
 - Gauss-Jordan módszerrel,
 - rendszámnöveléses módszerrel!
 - Határozza meg a technológiai mátrix LU-felbontását!
 - Határozza meg a technológiai mátrix determinánsát!
 - Tekintsük a technológiai mátrix harmadrendű fő minormátrixát, legyen ez egy B mátrix. Határozza meg az alábbi felbontásokat:
 - $B \cdot B^t$ mátrix Choleski-felbontását (B^t a B transzponáltja),
 - B mátrix QR-felbontását,
 - B mátrix GH-felbontását!
 - Tekintsük a technológiai mátrix másodrendű fő minormátrixát, legyen ez egy C mátrix.
 - Határozza meg a C mátrix sajátértékeit!
 - Határozza meg a C mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó azon sajátvektort, amely egységnyi hosszúságú!
- B) Vektor-mátrix műveletek segítségével számítsa ki az alábbiakat!
- Egy-egy termékre vonatkozó erőforrásonkénti erőforrás-ráfordítást értékben kifejezve!
 - Egy-egy termékre vonatkozó összes erőforrás-ráfordítást értékben számolva!
 - Az előállított termékekhez szükséges összes erőforrás-ráfordítást értékben megadva!
 - Az előállított termékek összes szerelési költségét!

2. ALKALMAZOTT LINEÁRIS ALGEBRA HÁZI FELADAT

A feladat sorszáma: 141

Egy bizonyos gazdasági mutató (Y) változását három fontos hatótényező (X1, X2, X3) befolyásolja. Az alábbi táblázat a vizsgált mutatóra és a hatótényezőkre vonatkozó mérési adatokat tartalmazza.

X1:	2	3	5	8	9	11
X2:	11	8	6	5	3	1
X3:	2	4	7	9	11	12
Y:	16	20	23	28	32	36

FELADAT:

Határozzuk meg a mérési adatokat közelítő $Y = a + b \cdot X_1 + c \cdot X_2 + d \cdot X_3$ függvényt a **legkisebb négyzetek módszerével!**

- Írja fel a feladat matematikai modelljét és a megoldandó normálegyenletet!
- A normálegyenletet **pivotálással** oldja meg! *Gauss-Jordan?*
- Számítsa ki a normálegyenlet együtthatómátrixának inverzét **pivotálással!** *Gauss-Jordan!*
- Tekintsük csak az első hatótényezőt (X1)! Határozza meg ehhez a modellhez tartozó Moore-Penrose féle általánosított inverzet és ennek segítségével a közelítő $Y = a + b \cdot X_1$ függvényt!

3. ALKALMAZOTT LINEÁRIS ALGEBRA HÁZI FELADAT

A feladat sorszáma: 141

Egy négysektoros gazdaságban, ahol egy-egy szektor egy-egy terméket állít elő, ismertek a **közvetlen ráfordítások**, a **szektorok nettó kibocsátása és a termékek egységára**. A közvetlen ráfordítások mátrixa, a nettó kibocsátás vektora és az árvektor sorrendben a következő:

	B	r	p																								
<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0.2</td><td>0.1</td><td>0.3</td><td>0.2</td></tr> <tr><td>0.2</td><td>0.2</td><td>0.0</td><td>0.3</td></tr> <tr><td>0.3</td><td>0.5</td><td>0.3</td><td>0.1</td></tr> <tr><td>0.0</td><td>0.2</td><td>0.1</td><td>0.2</td></tr> </table>	0.2	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2	0.0	0.3	0.3	0.5	0.3	0.1	0.0	0.2	0.1	0.2	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>17</td></tr> <tr><td>11</td></tr> <tr><td>26</td></tr> <tr><td>22</td></tr> </table>	17	11	26	22	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>12</td></tr> <tr><td>17</td></tr> <tr><td>12</td></tr> <tr><td>22</td></tr> </table>	12	17	12	22	
0.2	0.1	0.3	0.2																								
0.2	0.2	0.0	0.3																								
0.3	0.5	0.3	0.1																								
0.0	0.2	0.1	0.2																								
17																											
11																											
26																											
22																											
12																											
17																											
12																											
22																											

FELADAT:

Vizsgáljuk meg a fentebb adott négysektoros gazdasági rendszert!

- Határozza meg a teljes és a közvetett ráfordításokat! $T = B$
- Határozza meg a termékegységre vonatkozó új értéket! w
- Határozza meg a **bruttó kibocsátást szektoronként!** q
- Határozza meg a szektoronként előállított új értéket! $z = w \cdot T \cdot Q$
- Írja fel az ágazati kapcsolatok mérlegét természetes egységben!
- Írja fel az ágazati kapcsolatok mérlegét értékben kifejezve!
- Számítsa ki a **pénzegységre eső közvetlen ráfordításokat!** $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

ALKALMAZOTT LINEÁRIS ALGEBRA HÁZI FELADAT EREDMÉNYLAP

Feladat sorszáma: 141 Készítette:.....

1. A) b) Termékmennyiség:

17	10	25	22
----	----	----	----

c) A technológiai mátrix inverzének főátlójában szereplő elemek összege: 18/37

d) Az L és az U mátrix elemeinek összege: 33,1879

e) A technológiai mátrix determinánsa: -111

f) A felbontásokban szereplő két-két mátrix elemeinek összege: 350718 , 21,6260 , 15,4

B) c) Összes erőforrás ráfordítás: 81,628

d) Összes szerelési költség: 5,190

2. a) A normálegyenlet együtthatómátrixa:

G	38	34	45
38	304	154	354
34	154	256	186
45	354	186	415

b) $Y = 25,5609 + 1,5823 \cdot X1 + 1,0823 \cdot X2 + 0,4821 \cdot X3$

c) A keresett inverzmátrix főátlójában szereplő elemek összege: 83,5060

d) A Moore-Penrose féle általánosított inverz elemeinek összege: 1

3. a) A teljes ill. a közvetett ráfordítások mátrixának elemösszege: 17,8945 , 14,6945

b) Új érték termékegységenként:

26	2	26	8,9
----	---	----	-----

c) Bruttó kibocsátás szektoronként:

89,7983	57,7961	125,1407	57,5924
---------	---------	----------	---------

d) Új érték szektoronként:

233,4756	115,5922	325,3658	512,5724
----------	----------	----------	----------

f) Az értékben kifejezett mérleg:

1077,5796	215,5164	69,3552	450,5064	138,2220	204
982,5337	305,3149	196,5064	0	293,7209	187
1501,6884	323,2740	346,7772	450,5064	69,1104	312
1267,0328	0	254,3024	275,3102	253,1070	484
	233,4756	115,5922	325,3658	512,5724	

g) A pénzegységre eső közvetlen ráfordítások mátrixa:

0,2	0,0706	0,3	0,1091
0,2833	0,2	0	0,2318
0,3	0,3529	0,3	0,0546
0	0,2588	0,1833	0,2

1. Feladat

(1)

$$\begin{aligned}
 \text{A/a} \quad 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 214 \\
 0 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 309 \\
 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 152 \\
 2x_1 + x_2 + 6x_3 + 5x_4 &= 304
 \end{aligned}$$

A/b. Gauss-módszerrel

⑤	1	3	2	214	
0	3	5	7	309	$\lambda = 0$
3	1	1	3	152	$\lambda = 3/5$
2	1	6	5	304	$\lambda = 2/5$

5	1	3	2	214	
0	③	5	7	309	
0	2/5	-4/5	9/5	118/5	$\lambda = 2/15$
0	3/5	24/5	21/5	1092/5	$\lambda = 3/15$

5	1	3	2	214	
0	3	5	7	309	
0	0	-22/15	13/15	-88/5	
0	0	19/5	14/5	782/5	$\lambda = -57/22$

5	1	3	2	214	
0	3	5	7	309	
0	0	-22/15	13/15	-88/5	
0	0	0	111/22	111	

$$\begin{aligned}
 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 214 \\
 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 309 \\
 -22/15x_3 + 13/15x_4 &= -88/5 \\
 111/22x_4 &= 111 \\
 x_4 &= 22
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -22/15x_3 + 13/15 \cdot 22 &= -88/5 \\
 x_3 &= 25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3x_2 + 5 \cdot 25 + 7 \cdot 22 &= 309 \\
 x_2 &= 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5x_1 + 10 + 3 \cdot 25 + 2 \cdot 22 &= 214 \\
 x_1 &= 17
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 x_1 = 17 \\
 x_2 = 10 \\
 x_3 = 25 \\
 x_4 = 22
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ell.: } 5 \cdot 17 + 10 + 3 \cdot 25 + 2 \cdot 22 &= 214 \Rightarrow 214 = 214 \\
 3 \cdot 10 + 5 \cdot 25 + 7 \cdot 22 &= 309 \Rightarrow 309 = 309 \\
 3 \cdot 17 + 10 + 25 + 3 \cdot 22 &= 152 \Rightarrow 152 = 152 \\
 2 \cdot 17 + 10 + 6 \cdot 25 + 5 \cdot 22 &= 304 \Rightarrow 304 = 304
 \end{aligned}$$

(2)

Gauss-Jordan módszerrel + inverz

5	1	3	2	214	1	0	0	0	
0	3	5	7	309	0	1	0	0	$\lambda=0$
3	1	1	3	152	0	0	1	0	$\lambda=3/5$
2	1	6	5	304	0	0	0	1	$\lambda=2/5$

1	1/5	3/5	2/5	214/5	1/5	0	0	0	$\lambda=1/5$
0	3	5	7	309	0	1	0	0	
0	2/5	-4/5	9/5	118/5	-3/5	0	1	0	$\lambda=2/15$
0	3/5	24/5	21/5	1092/5	-2/5	0	0	1	$\lambda=3/15=1/5$

1	0	4/15	-1/15	111/5	1/5	-1/15	0	0	$\lambda=2/11$
0	1	5/3	7/3	103	0	1/3	0	0	$\lambda=-25/22$
0	0	-22/15	13/15	-88/5	-3/5	-2/15	1	0	
0	0	19/5	11/5	783/5	-2/5	-1/5	0	1	$\lambda=-57/22$

1	0	0	1/11	19	1/11	-1/11	2/11	0	$\lambda=2/11$
0	1	0	73/22	83	-13/22	2/11	25/22	0	$\lambda=73/111$
0	0	1	-13/22	12	9/22	1/11	-15/22	0	$\lambda=-13/111$
0	0	0	111/22	111	-43/22	-6/11	57/22	1	

1	0	0	0	17	14/111	-3/37	5/37	-2/111	A^{-1}
0	1	0	0	10	67/111	20/37	-21/37	-73/111	
0	0	1	0	25	20/111	1/37	-14/37	13/111	
0	0	0	1	22	-43/111	-4/37	19/37	22/111	

az adott elemek összege: 18/37

Ell.:

14/111	-3/37	5/37	-2/111	A^{-1}
67/111	20/37	-21/37	-73/111	
20/111	1/37	-14/37	13/111	
-43/111	-4/37	19/37	22/111	

5	1	3	2	1	0	0	0	$AA^{-1} = I$
0	3	5	7	0	1	0	0	
3	1	1	3	0	0	1	0	
2	1	6	5	0	0	0	1	

5

A/b-c Pivotátdással + inverz

$$\begin{array}{c}
 A \\
 \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_3 \\ a_4 \\ a_1 \\ a_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_4 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 b \\ b \\ b \\ b
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 a_1 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ a_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_3 \\ a_4 \\ a_1 \\ a_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_4 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 b \\ b \\ b \\ b \\ b
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 a_1 \\ e_1 \\ e_2 \\ a_1 \\ a_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_1 \\ a_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_3 \\ a_4 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_4 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 b \\ b \\ b \\ b \\ b
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 a_1 \\ e_1 \\ e_2 \\ a_1 \\ a_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_1 \\ a_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_3 \\ a_4 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_4 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 b \\ b \\ b \\ b \\ b
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 a_4 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_3 \\ a_4 \\ a_1 \\ a_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_4 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 b \\ b \\ b \\ b
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_1
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_3 \\ a_4 \\ a_1 \\ a_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_4 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 b \\ b \\ b \\ b
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4
 \end{array}$$

A inverze pivotátdással

A/c

(H.)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} E^{-1} + E^{-1}FS^{-1}GE^{-1} & -E^{-1}FS^{-1} \\ -S^{-1}GE^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}$$

$$S = H - GE^{-1}F$$

$$A = \begin{array}{c|cc|cc} & \begin{matrix} F \\ \hline 3 \\ \hline 5 \end{matrix} & & & \\ \hline \begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix} & & \begin{matrix} F \\ \hline 3 \\ \hline 5 \end{matrix} & & \\ \hline & & & \begin{matrix} H \\ \hline 1 \\ \hline 1 \end{matrix} & \\ \hline \begin{matrix} G \\ \hline 3 \\ \hline 1 \end{matrix} & & & & \end{array}$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -1/15 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1}F = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 3 \\ \hline 5 \end{matrix} & F \\ \hline \begin{matrix} 1/5 & -1/15 \\ 0 & 1/3 \end{matrix} & \begin{matrix} 3/5 \\ \hline 5/3 \end{matrix} \end{array}$$

$$GE^{-1} = \begin{array}{c|cc} \begin{matrix} 1/5 & -1/15 \\ 0 & 1/3 \end{matrix} & E^{-1} \\ \hline \begin{matrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} GE^{-1} \\ \hline 3/5 & 2/15 \end{matrix} \end{array}$$

$$GE^{-1}F = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 3 \\ \hline 5 \end{matrix} & F \\ \hline \begin{matrix} 3/5 & 2/15 \\ 3/5 & 2/15 \end{matrix} & \begin{matrix} GE^{-1}F \\ \hline 3/5 & 2/15 \end{matrix} \end{array}$$

$$S = H - GE^{-1}F = 1 - 3/5 = -2/5 \Rightarrow S^{-1} = -5/2$$

$$S^{-1}GE^{-1} = \begin{array}{c|cc} \begin{matrix} 3/5 & 2/15 \\ -15/22 & -9/22 \end{matrix} & GE^{-1} \\ \hline \begin{matrix} -15/22 & -9/22 \\ -1/11 \end{matrix} & S^{-1}GE^{-1} \end{array} \Rightarrow -S^{-1}GE^{-1} = \begin{bmatrix} 9/22 & 1/11 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1}FS^{-1} = \begin{array}{c|cc} \begin{matrix} -15/22 \\ \hline 4/15 & 2/11 \\ 5/3 & 25/22 \end{matrix} & S^{-1} \\ \hline \begin{matrix} 4/15 & 2/11 \\ 5/3 & 25/22 \end{matrix} & E^{-1}FS^{-1} \end{array} \Rightarrow -E^{-1}FS^{-1} = \begin{bmatrix} 2/11 \\ 25/22 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1}FS^{-1}GE^{-1} = \begin{array}{c|cc} \begin{matrix} 3/5 & 2/15 \\ -2/11 & -6/55 \end{matrix} & GE^{-1} \\ \hline \begin{matrix} -2/11 & -6/55 \\ -25/22 & -5/33 \end{matrix} & E^{-1}FS^{-1}GE^{-1} \end{array}$$

$$E^{-1}FS^{-1}GE^{-1} + E^{-1} = \begin{array}{c|cc} \begin{matrix} -6/55 & -4/165 \\ -15/22 & -5/33 \end{matrix} & \\ \hline \begin{matrix} 1/5 & -1/15 \\ 0 & 1/3 \end{matrix} & E^{-1} \\ \hline \begin{matrix} 1/11 & -1/11 \\ -15/22 & 2/11 \end{matrix} & E^{-1} + E^{-1}FS^{-1}GE^{-1} \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/11 & -1/11 & 2/11 \\ -15/22 & 2/11 & 25/22 \\ 9/22 & 1/11 & -15/22 \end{bmatrix}$$

5.

$$A = \begin{array}{ccc|c} & \begin{array}{c} E \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{c} F \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ \hline \end{array} & \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{array} & & \begin{array}{c} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} E^{-1} + E^{-1}FS^{-1}GE^{-1} & -E^{-1}FS^{-1} \\ -S^{-1}GE^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}$$

$$S = H - GE^{-1}F$$

$$E^{-1} = \begin{array}{ccc|c} & \begin{array}{c} F \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} E^{-1} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{ccc} 1/11 & -1/11 & 2/11 \\ -15/22 & 2/11 & 25/22 \\ 9/22 & 1/11 & -15/22 \end{array} & & \begin{array}{c} 2 \\ 7 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

$$G = \begin{array}{c|cc} & \begin{array}{c} F \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ \hline \end{array} & \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

$$S = H - GE^{-1}F = 5 - (-1/22) = 111/22 \Rightarrow S^{-1} = 22/111$$

$$G = \begin{array}{c|cc} & \begin{array}{c} F \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} G \\ \hline \end{array} & \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

$$S^{-1} = \begin{array}{c|cc} & \begin{array}{c} F \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} S^{-1} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{cc} 43/22 & 6/11 \\ 22/111 & 43/111 \end{array} & \begin{array}{c} 57/22 \\ 12/111 \end{array} \end{array}$$

$$E^{-1}FS^{-1}GE^{-1} = \begin{array}{ccc|c} & \begin{array}{c} F \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} E^{-1}FS^{-1}GE^{-1} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{ccc} 43/111 & 12/111 & -57/111 \\ 43/221 & 12/221 & -57/221 \\ 3139/2442 & 876/2442 & -416/2442 \\ -559/2442 & -156/2442 & 741/2442 \end{array} & & \begin{array}{c} 43/111 \\ 12/111 \\ -57/111 \end{array} \end{array}$$

$$-S^{-1}GE^{-1} = \begin{bmatrix} -43/111 & -12/111 & 57/111 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{array}{ccc} 1/11 & -1/11 & 2/11 \\ -15/22 & 2/11 & 25/22 \\ 9/22 & 1/11 & -15/22 \end{array}$$

$$E^{-1}FS^{-1}GE^{-1} = \begin{array}{ccc} 43/221 & 12/221 & -57/221 \\ 3139/2442 & 876/2442 & -416/2442 \\ -559/2442 & -156/2442 & 741/2442 \end{array}$$

$$E^{-1} + E^{-1}FS^{-1}GE^{-1} = \begin{array}{ccc} 14/111 & -9/111 & 15/111 \\ 67/111 & 60/111 & -63/111 \\ 20/111 & 2/111 & 42/111 \end{array}$$

(6.)

$$\begin{array}{c}
 E^{-1}F \\
 \left[\begin{array}{cc|cc}
 22/1111 & & & \\
 1/11 & 2/1111 & & \\
 70/22 & 70/1111 & & \\
 -10/22 & -10/1111 & &
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 S^{-1} \\
 E^{-1}FS^{-1}
 \end{array}
 \Rightarrow
 -E^{-1}FS^{-1}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cc|cc}
 -2/1111 & & & \\
 70/1111 & & & \\
 10/1111 & & &
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} F \\ \left[\begin{array}{ccc|c}
 14/1111 & -3/07 & 5/07 & -2/1111 \\
 67/1111 & 20/07 & -21/07 & -70/1111 \\
 20/1111 & 1/07 & -14/07 & 10/1111 \\
 \hline
 -40/1111 & -4/07 & 19/07 & 22/1111
 \end{array} \right] \\ \downarrow \\ G \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \downarrow \\ H \end{array}$$

A/d LU felbontás

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -22/15 & 10/15 \\ 0 & 0 & 0 & 11/22 \end{bmatrix}$$

U Gauss elimináció eredményeképp megjelenik az U mátrix

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 2/15 & 1 & 0 \\ 2/5 & 3/15 & -57/22 & 1 \end{bmatrix}$$

U L mátrixot megkapjuk, ha minden lépésben a főátlóban kiinduló pirotelemmel osztjuk a pirotelemet, és az alatta lévő számokat, a pirotelem felett pedig nullákat írunk.

U L és az U mátrix elemeinek összege: 33,1879

$$26 + \frac{10}{15} - \frac{22}{15} + \frac{11}{22} + 1 + 1 + \frac{5}{15} - \frac{57}{22} = 31 - \frac{4}{15} + \frac{54}{22} = 33,1879$$

A/e ut technológiai mátrix determinánása:

ut födéltobban levd elemek szorzata a LU felbontás eredményeképpen (rövidebb) $A = L \cdot U$

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U) = 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{22}{15}\right) \cdot \left(\frac{111}{22}\right) = \underline{\underline{-111}}$$

rosszabb:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = 5 \det \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - 5 \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + 7 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 3(5-18) - 5(5-3) + 7(6-1) = -14$$

$$0 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - 5 \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + 7 \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 0(5-18) - 5(15-6) + 7(18-2) = 67$$

$$0 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + 7 \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0(5-3) - 3(15-6) + 7(3-2) = -20$$

$$0 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + 5 \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 0(6-1) - 3(18-2) + 5(3-2) = -43$$

$$\det(A) = 5(-14) - 1 \cdot 67 + 3(-20) - 2(-43) = -70 - 67 - 60 + 86 = \underline{\underline{-111}}$$

A/f. Karmadrendű főminormátrix Choleski felbontása:

$$B \cdot B^T \Rightarrow U \Rightarrow \tilde{U} \Rightarrow \tilde{U}^T \Rightarrow B \cdot B^T = \tilde{U}^T \cdot U$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot B^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 18 & 19 \\ 18 & 34 & 8 \\ 19 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Gauß módszerrel

$$\begin{bmatrix} 35 & 18 & 19 \\ 18 & 34 & 8 \\ 19 & 8 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda = 18/35} \begin{bmatrix} 35 & 18 & 19 \\ 0 & 866/35 & -62/35 \\ 0 & -62/35 & 24/35 \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda = -31/433} \begin{bmatrix} 35 & 18 & 19 \\ 0 & 866/35 & -62/35 \\ 0 & 0 & 242/433 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{U} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{35} & 18/\sqrt{35} & 19/\sqrt{35} \\ 0 & \sqrt{866/35} & -62/35 \\ 0 & 0 & \sqrt{242/433} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{L} = \tilde{U}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{35} & 0 & 0 \\ 18/\sqrt{35} & \sqrt{866/35} & 0 \\ 19/\sqrt{35} & -62/35 & \sqrt{242/433} \end{bmatrix}$$

Elemek összege:

$$2(\sqrt{35} + \frac{18}{\sqrt{35}} + \frac{19}{\sqrt{35}} + \sqrt{\frac{866}{35}} - \frac{62}{1866/35} + \sqrt{\frac{242}{433}}) = \underline{\underline{35,0718}} \checkmark$$

8.

QR felbontás

$$B^T \cdot B \rightarrow u \Rightarrow \tilde{u} = R \Rightarrow R^{-1} \quad BR^{-1} = Q$$

$$B^T \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 8 & 18 \\ 8 & 11 & 19 \\ 18 & 19 & 35 \end{bmatrix} \begin{array}{l} H|17 \\ 9|17 \end{array}$$

Gauss-módszerrel

$$\begin{bmatrix} 34 & 8 & 18 \\ 0 & 155/17 & 251/17 \\ 0 & 251/17 & 242/17 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 251/155 \\ 251/155 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 34 & 8 & 18 \\ 0 & 155/17 & 251/17 \\ 0 & 0 & 242/155 \end{bmatrix} \begin{array}{l} u \\ \\ \end{array} \Rightarrow \tilde{u} = R = \begin{bmatrix} \sqrt{34} & \frac{8}{\sqrt{34}} & \frac{18}{\sqrt{34}} \\ 0 & \sqrt{155/17} & \frac{251/17}{\sqrt{155/17}} \\ 0 & 0 & \sqrt{242/155} \end{bmatrix}$$

R

$$\begin{bmatrix} \sqrt{34} & \frac{8}{\sqrt{34}} & \frac{18}{\sqrt{34}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{155/17} & \frac{251/17}{\sqrt{155/17}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{242/155} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \end{array}$$

Gauss-Jordan módszerrel meghatározom R inverzét

$$\begin{bmatrix} 1 & 4/17 & 9/17 & 1/\sqrt{34} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{155/17} & \frac{251}{\sqrt{155/17}} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{242/155} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \lambda = \frac{4}{\sqrt{2635}} \\ \lambda = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 23/155 & 1/\sqrt{34} & -4/\sqrt{2635} & 0 \\ 0 & 1 & 251/155 & 0 & \sqrt{17/155} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{242/155} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \lambda = \frac{23}{\sqrt{37510}} \\ \lambda = \frac{251}{\sqrt{37510}} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -23 \\ \sqrt{34} & \sqrt{2635} & \sqrt{37510} \\ 0 & \sqrt{17} & \sqrt{37510} \\ 0 & 0 & \sqrt{155} \\ 0 & 0 & \sqrt{242} \end{bmatrix} \begin{array}{l} R^{-1} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{34} & \frac{4}{\sqrt{2635}} & \frac{23}{\sqrt{37510}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{17/155} & \frac{-251}{\sqrt{37510}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{155/242} \end{bmatrix} \begin{array}{l} R^{-1} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} BR^{-1} \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} & \frac{-3}{\sqrt{2635}} & \frac{99}{\sqrt{37510}} \\ 0 & 3\sqrt{17/155} & \frac{22}{\sqrt{37510}} \\ \frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{5}{\sqrt{2635}} & \frac{-165}{\sqrt{37510}} \end{bmatrix}$$

Elemek összege: Q + R

$$\frac{68}{\sqrt{34}} + \frac{155+251-3+51+5}{\sqrt{2635}} + \frac{242+99+22-165}{\sqrt{37510}} = 21,625982$$

$$Een.: Q \cdot R = B$$

GH - felbonthatás

B

5	1	3
0	3	5
3	1	1

G₁ H₁

1	1/5	3/5	
5	5	1	3
0	0	0	0
3	3	3/5	3/5

G =

5	0	0
0	3	0
3	2/5	-22/15

← kivonjuk →

0	0	0
0	3	5
0	2/5	-4/5

G₂ H₂

0	1	5/3	
0	0	0	0
3	0	3	5
2/5	0	2/5	2/3

H =

1	1/5	3/5
0	1	5/3
0	0	1

ell.:
B = G · H

0	0	0
0	0	0
0	0	-22/15

G₃ H₃

0	0	1	
0	0	0	0
0	0	0	0
-22/15	0	0	-22/15

ell.:
G

1	1/5	3/5
0	1	5/3
0	0	1
5	0	0
0	3	0
3	2/5	-22/15

Elemjeinek összege: 15,4000

1/B/a Egy-egy termékre vonatkozó erőforrásra vonatkozó ráfordítás értékekben.

				A				PA			
93	0	0	0	5	1	3	2	465	93	279	186
0	94	0	0	0	3	5	7	0	282	170	658
0	0	71	0	3	1	1	3	213	71	71	213
0	0	0	72	2	1	6	5	144	72	432	360

b) Összes erőforrás ráfordítás: $[822 \ 518 \ 1252 \ 1417] P^T A$

c) Összes erőforrásra fordítás értékekben

$822 \cdot 17 + 518 \cdot 10 + 1252 \cdot 25 + 1417 \cdot 22 = 81.628 P^T A$

17	x			
10				
25				
22				
822	518	1252	1417	81628

d) Összes szerelési költség.

$73 \cdot 17 + 59 \cdot 10 + 71 \cdot 25 + 72 \cdot 22 = 5190$

17	x			
10				
25				
22				
73	59	71	72	5190

2/a

(10.)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 8 & 5 & 9 \\ 1 & 9 & 3 & 11 \\ 1 & 11 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 23 \\ 28 \\ 32 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 9 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

		1	2	11	2						
		1	3	8	4						
		1	5	6	7						
		1	8	5	9						
		1	9	3	11						
		1	11	1	12						
	X^T										
1	1	1	1	1	1	6	38	34	45		
2	3	5	8	9	11	38	304	154	354		
11	8	6	5	3	1	34	154	256	186		
2	4	7	9	11	12	45	354	186	415		

$$Y = a + b \cdot x_1 + c \cdot x_2 + d \cdot x_3$$

$$X^T X \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = X^T Y \quad \text{normálegyenlet rendszer}$$

						16	
						20	
						23	
						28	
						32	
						36	
	X^T						Y
1	1	1	1	1	1	155	$X^T Y$
2	3	5	8	9	11	1115	
11	8	6	5	3	1	746	
2	4	7	9	11	12	1309	

$$X^T X = \begin{bmatrix} 6 & 38 & 34 & 45 \\ 38 & 304 & 154 & 354 \\ 34 & 154 & 256 & 186 \\ 45 & 354 & 186 & 415 \end{bmatrix}$$

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 155 & 1115 & 746 & 1309 \end{bmatrix}$$

$$6a + 38b + 34c + 45d = 155$$

$$38a + 304b + 154c + 354d = 1115$$

$$34a + 154b + 256c + 186d = 746$$

$$45a + 354b + 186c + 415d = 1309$$

2/b-c Normalequationen pivotalsaal + inverz

$x^T x$	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	6	38	34	45	155	1	0	0	0
e_2	38	304	154	354	1115	0	1	0	0
e_3	34	154	256	186	746	0	0	1	0
e_4	45	354	186	415	1309	0	0	0	1

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	1	19/3	17/3	15/2	155/6	1/6	0	0	0
e_2	0	190/3	-184/3	69	1100/3	-19/3	1	0	0
e_3	0	-184/3	190/3	-69	-397/3	-17/3	0	1	0
e_4	0	69	-69	155/2	293/2	-15/2	0	0	1

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	1	0	112/92	3/8	2239/184	-77/184	0	19/184	0
e_2	0	0	187/46	-9/4	-305/92	-1121/92	1	95/92	0
a_3	0	1	-95/92	9/8	397/184	17/184	0	-3/184	0
e_4	0	0	9/4	-1/8	-19/8	-111/8	0	9/8	1

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	1	0	0	218/207	5186/207	15995/207	0	-6	-1123/207
e_2	0	0	0	-119/207	202/207	2667/207	1	-1	-374/207
a_2	0	1	0	221/207	221/207	-1299/207	0	1/2	95/207
a_3	0	0	1	-1/18	-19/18	-111/18	0	1/2	4/9

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	1	0	0	0	10710/419	34173/419	218/419	-2732/419	-2667/419
a_4	0	0	0	1	-202/419	-2667/419	-207/419	207/419	374/419
a_2	0	1	0	0	663/419	218/419	221/419	-23/838	-207/419
a_3	0	0	1	0	-907/838	-2732/419	-23/838	221/419	207/419

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	1	0	0	0	10710/419	34173/419	218/419	-2732/419	-2667/419
a_2	0	1	0	0	663/419	218/419	221/419	-23/838	-207/419
a_3	0	0	1	0	-907/838	-2732/419	-23/838	221/419	207/419
a_4	0	0	0	1	-202/419	-2667/419	-207/419	207/419	374/419

$(x^T x)^{-1}$

$\sum a_i + b$ dazwischen: $\frac{34 \cdot 173 + 221 + 221 + 374}{419} = \frac{34 \cdot 989}{419} = 83,50597$

$a = 10710/419 = 25,5609$
 $b = 663/419 = 1,5823$
 $c = -907/838 = -1,0823$
 $d = -202/419 = -0,4821$

$y = a + b \cdot x_1 + c \cdot x_2 + d \cdot x_3$
 $y = 25,5609 + 1,5823 x_1 - 1,0823 x_2 - 0,4821 x_3$

(17)

$(G^T G)^{-1}$		1	1	1	1	1	1
		0	1	3	6	7	9
$H H / 95$	$-13/190$	$H H / 95$	$15/38$	$H 9 / 190$	$1/19$	$-2/190$	$-29/190$
$-13/190$	$3/190$	$-13/190$	$-1/19$	$-2/95$	$1/38$	$4/95$	$7/95$

G^T

$(G^T G)^{-1} \cdot G^T$

$H^T (H H^T)^{-1}$		$H H / 95$	$15/38$	$H 9 / 190$	$1/19$	$-2/190$	$-29/190$
		$-13/190$	$-1/19$	$-2/95$	$1/38$	$4/95$	$7/95$
1	-2	$3/5$	$1/2$	$3/10$	0	$-1/10$	$-3/10$
0	1	$-13/190$	$-1/19$	$-2/95$	$1/38$	$4/95$	$7/95$

$(G^T G)^{-1} \cdot G^T$

$H^T (H H^T)^{-1} \cdot (G^T G)^{-1} \cdot G^T = x^T$

Elemzisek összege : 1

$$b = x^T \cdot y = \left[H^T (H \cdot H^T)^{-1} \cdot (G^T G)^{-1} \cdot G^T \right] \cdot y$$

x^T							
							16
							20
							23
							28
							32
							36
							25/2
							h0/19

y

b

$$y = 25/2 + h0/19 \cdot x_1$$

3/a
$$\begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{matrix} r \\ r \\ r \\ r \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{drucker} \end{matrix} \begin{matrix} (14) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,3 & -0,2 \\ -0,2 & 0,8 & 0,0 & -0,3 \\ -0,3 & -0,5 & 0,7 & -0,1 \\ 0,0 & -0,2 & -0,1 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 1-B \end{matrix}$$

Tejes rãfordítás matrix: $T = (I - B)^{-1}$ Gauss-Jordan módszerre

$$\begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,3 & -0,2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0,8 & 0,0 & -0,3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,3 & -0,5 & 0,7 & -0,1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,0 & -0,2 & -0,1 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -0,25 \\ -0,375 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,125 & -0,375 & -0,25 & 1,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,775 & -0,075 & -0,35 & 0,25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5375 & 0,5875 & -0,175 & 0,375 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0,2 & -0,1 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -0,16129 \\ \\ -0,693548 \\ -0,258065 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,3871 & -0,30645 & 1,29032 & 0,16129 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,09677 & 0,15161 & 0,32258 & 1,290323 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,53548 & -0,11774 & 0,54839 & 0,69355 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,11935 & 0,70968 & 0,064516 & 0,25806 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -0,7229 \\ 0,180716 \\ \\ -0,22288 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,60844 & 1,68675 & 0,66266 & 0,7229 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0,5271 & 0,42168 & 1,11566 & 0,18072 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,78012 & 1,02411 & 1,295193 & 1,86748 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,61657 & 0,18674 & 0,412638 & 0,22288 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -0,986862 \\ -0,854891 \\ -1,265258 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1,8710 & 1,0699 & 0,9428 & 0,9868 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,5813 & 1,7684 & 0,3713 & 0,8549 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1,2604 & 1,8173 & 2,1495 & 1,2653 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,3029 & 0,6693 & 0,3615 & 1,6219 \end{bmatrix} (I - B)^{-1} = T$$

Tejes rãfordítások matrixának elemösszege: 17,8945

Közvetett ráfordítás = T-B

$$T = (I - B)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1,8710 & 1,0699 & 0,9428 & 0,9868 \\ 0,5813 & 1,7684 & 0,5713 & 0,8549 \\ 1,2604 & 1,8173 & 2,1495 & 1,2653 \\ 0,3029 & 0,6693 & 0,3615 & 1,6219 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,0 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0,0 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6710 & 0,9699 & 0,6428 & 0,7868 \\ 0,3813 & 1,5684 & 0,5713 & 0,5549 \\ 0,9604 & 1,3173 & 1,8495 & 1,1653 \\ 0,3029 & 0,4693 & 0,2615 & 1,4219 \end{bmatrix}$$

Közvetett ráfordítások mátrixának elemösszege: 11,6945

b.) Termékegységre vonatkozó díj értékek

$$p^T(I - B) = m^T$$

$$\begin{matrix} p^T \\ \hline 12 & 17 & 12 & 22 & 26 & 2 & 26 & 8,9 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,8 & -0,1 & -0,3 & -0,2 \\ -0,2 & 0,8 & 0 & -0,3 \\ -0,3 & -0,5 & 0,7 & -0,1 \\ 0 & -0,2 & -0,1 & 0,8 \end{bmatrix} = m^T$$

c.) 3^o kibocsátás szektoronként: q = T · r

$$\begin{matrix} T \\ \hline 1,8710 & 1,0699 & 0,9428 & 0,9868 & 89,7983 \\ 0,5813 & 1,7684 & 0,5713 & 0,8549 & 57,7961 \\ 1,2604 & 1,8173 & 2,1495 & 1,2653 & 125,1407 \\ 0,3029 & 0,6693 & 0,3615 & 1,6219 & 57,5924 \end{matrix} \begin{matrix} r \\ \hline 17 \\ 11 \\ 26 \\ 22 \end{matrix} = q$$

d.) Díj érték szektoronként: z^t = m^t · Q

$$\begin{matrix} m^t \\ \hline 26 & 2 & 26 & 8,9 & 233,4756 & 115,5922 & 325,3658 & 512,5724 \end{matrix} \begin{bmatrix} 89,7983 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 57,7961 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 125,1407 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57,5924 \end{bmatrix} = z^t$$

e) utgarati kapcsolatok merlege természetes egysegekben:

		89,7983	0	0	0	Q				
		0	57,7961	0	0					
		0	0	125,1407	0					
		0	0	0	57,5924					
B	Q	0,2	0,1	0,3	0,2	17,9597	5,77961	37,5422	11,5185	BQ
		0,2	0,2	0,0	0,3	17,9597	11,5592	0	17,2777	
		0,3	0,5	0,3	0,1	26,9395	28,8981	37,5422	5,7592	
		0,0	0,2	0,1	0,2	0	11,5592	12,5141	11,5185	

Q	BQ	r
z ^T		

Q	B.Q	r					
89,7983	17,9597	5,7796	37,5422	11,5185	17		
57,7961	17,9597	11,5592	0	17,2777	11		
125,1407	26,9395	28,8981	37,5422	5,7592	26		
57,5924	0	11,5592	12,5141	11,5185	22		
z ^t							
[233,4756					115,5922	325,3658	512,5724]

f) utgarati kapcsolatok merlege ertekekben:

		89,7983	0	0	0	Q				
		0	57,7961	0	0					
		0	0	125,1407	0					
		0	0	0	57,5924					
P	Q	12	17	12	22	1077,5796	982,5337	1501,6884	1267,0328	PQ

PQ	PBQ	P.r
z ^T		

		17,9597	5,7796	37,5422	11,5185	BQ				
		17,9597	11,5592	0	17,2777					
		26,9395	28,8981	37,5422	5,7592					
		0	11,5592	12,5141	11,5185					
P	Q	12	0	0	0	215,5164	69,3552	450,5064	138,222	PBQ
		0	17	0	0	305,3149	196,5064	0	293,7209	
		0	0	12	0	323,274	346,7772	450,5064	69,1104	
		0	0	0	22	0	254,3024	275,3102	253,407	

		89,7983	57,7961	125,1407	57,5924	Q
P	Q	12	0	0	0	1077,5796
		0	17	0	0	982,5337
		0	0	12	0	1501,6884
		0	0	0	22	1267,0328

PQ	PBQ	Pr					
1077,5796	215,5164	69,3552	450,5064	138,222	204		
982,5337	305,3149	196,5064	0	293,7209	187		
1501,6884	323,274	346,7772	450,5064	69,1104	312		
1267,0328	0	254,3024	275,3102	253,407	484		
z ^t							
[233,4756					115,5922	325,3658	512,5724]

		17	11	26	22	r
P	Q	12	0	0	0	204
		0	17	0	0	187
		0	0	12	0	312
		0	0	0	22	484

g.) Példágyisegre eső közvetlen rőforoldás mőtrixa:

$A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

		P^{-1}							
		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{22}$	B			
P	12	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2	0,0706	0,3	0,1091
	17	0,2	0,2	0,0	0,3	0,2833	0,2	0	0,2318
	12	0,3	0,5	0,3	0,1	0,3	0,3529	0,3	0,0546
	22	0,0	0,2	0,1	0,2	0	0,2588	0,1833	0,2

$P \cdot B \cdot P^{-1} = A$

		B							
		0,2	0,1	0,3	0,2				
		0,2	0,2	0,0	0,3				
		0,3	0,5	0,3	0,1				
		0,0	0,2	0,1	0,2				
P	12	0	0	0	2,4	1,2	3,6	2,4	
	0	17	0	0	3,4	3,4	0	5,1	
	0	0	12	0	3,6	6	3,6	1,2	
	0	0	0	22	0	4,4	2,2	4,4	

$P \cdot B$

		P^{-1}							
		$\frac{1}{12}$	0	0	0				
		0	$\frac{1}{17}$	0	0				
		0	0	$\frac{1}{12}$	0				
		0	0	0	$\frac{1}{22}$				
$P \cdot B$	2,4	1,2	3,6	2,4	0,2	0,0706	0,3	0,1091	
	3,4	3,4	0	5,1	0,2833	0,2	0	0,2318	
	3,6	6	3,6	1,2	0,3	0,3529	0,3	0,0546	
	0	4,4	2,2	4,4	0	0,2588	0,1833	0,2	

A